SYSTEME DE DEUX EQUATIONS

Définition 1 : Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues se présente sous la forme générale :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Où a, b, c, a', b', c' sont des nombres connus et x, y sont les inconnues.

Définition 2 : Résoudre un tel système, c'est déterminer l'ensemble de tous les couples (x, y), s'ils existent, qui vérifient toutes les équations du système.

1) Résolution par combinaisons linéaires

Théorème 1 : Certaines opérations sur un système le transforme en un système équivalent, c'est-à-dire admettant le même ensemble de solution

- Permuter les deux équations du système, ne change pas l'ensemble des solutions du système.
- Multiplier les deux membres d'une équation par un même nombre non nul, ne change pas l'ensemble des solutions du système.
- Remplacer une équation du système **par la somme des deux équations** du système, ne change pas l'ensemble des solutions du système.

Remarque : Avec l'habitude, on peut effectuer plusieurs de ces opérations en une étape.

Exemple : Résoudre, par la méthode des combinaisons linéaires, le système suivant

$$\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 5x-2y=8 \end{cases}$$

On va multiplier la 1ère équation par 5 et la deuxième équation par -2, afin que les coefficients de la variable *x* soient opposés *(on aurait pu inverser le rôle des inconnues)*

$$\begin{cases} 10x-15y=20 \\ -10x+4y=-16 \end{cases}$$

On va garder la 1ère équation et remplacer la 2nde par la somme des deux équations du système, afin d'obtenir une équation qui n'a plus qu'une seule inconnue

$$\begin{cases} 10x-15y=20 \\ -11y=4 \end{cases}$$

On résout alors la 2nde équation … sans oublier de garder la 1ère

$$\begin{cases} 10x-15y=20 \\ y=-\dfrac{4}{11} \end{cases}$$

On reporte la valeur trouvée dans la 1ère équation afin de déterminer la valeur de l'autre inconnue

$$\begin{cases} 10x-15\times\dfrac{-4}{11}=20 \\ y=-\dfrac{4}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{16}{11} \\ y=-\dfrac{4}{11} \end{cases}$$

Et on formule une belle conclusion : la solution du système est le couple $\left(\dfrac{16}{11};-\dfrac{4}{11}\right)$

2) Résolution par substitution :

Théorème 3 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'un système en exprimant une inconnue en fonction de l'autre et en substituant *(C'est-à-dire en remplaçant)* le résultat obtenu dans l'autre équation du système.

Exemple : Résoudre, par substitution, le système suivant

$$\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 5x-2y=8 \end{cases}$$

Choisissons d'exprimer x en fonction de y dans la 1$^{\text{ère}}$ équation *(On aurait pu échanger les rôles des deux inconnues ou faire cela dans la 2$^{\text{nde}}$)*

$$\begin{cases} x=\dfrac{4+3y}{2} \\ 5x-2y=8 \end{cases}$$

Substituons cette valeur de x à celle de la 2$^{\text{nde}}$ équation

$$\begin{cases} x=\dfrac{4+3y}{2} \\ 5\times\left(\dfrac{4+3y}{2}\right)-2y=8 \end{cases}$$

La 2$^{\text{nde}}$ équation n'a alors plus qu'une inconnue. Il faut résoudre cette équation pour trouver la valeur de y, après calcul on trouve :

$$\begin{cases} x=\dfrac{4+3y}{2} \\ y=-\dfrac{4}{11} \end{cases}$$

Enfin on reporte ce résultat dans la 1$^{\text{ère}}$ équation, et après simplification on trouve le même résultat qu'avec l'autre méthode

$$\begin{cases} x=\dfrac{4+3\times\left(-\dfrac{4}{11}\right)}{2} \\ y=-\dfrac{4}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{16}{11} \\ y=-\dfrac{4}{11} \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à conclure : la solution du système est le couple $\left(\dfrac{16}{11};-\dfrac{4}{11}\right)$

Remarque : Il est évident qu'en utilisant l'une ou l'autre des méthodes, il faut trouver les mêmes solutions.

3) Interprétation graphique *(sur un exemple)*

Exemple : Résoudre le système suivant et interprétez vos résultats

$$\begin{cases} 2x-y=-1 & (1) \\ x+y=1 & (2) \end{cases}$$

L'équation (1) est celle de la droite D_1. La droite D_1 est d'équation $y=$.......... ....

L'équation (2) est celle de la droite D_2. La droite D_2 est d'équation $y=$.......... ....

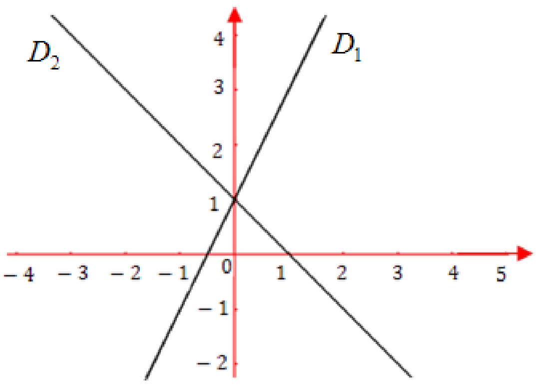
Objectif : tracer ces deux droites dans un même repère.

Pour cela vous compléterez les tableaux de valeurs suivants

D_1 : $y =$		
x		
y		

D_2 : $y =$		
x		
y		

Placer les deux couples de points trouvés pour chaque droite et tracer les droites D_1 et D_2 .



La méthode consiste à relever les coordonnées du point d'intersection des deux droites *(s'il existe)*.
Ainsi ce point est situé simultanément sur les deux droites. Ses coordonnées vérifient les deux équations et sont solutions du système proposé.

Si l'on applique cette méthode ici, on trouve que le point d'intersection semble être $I\ (1\ ;\ 0)$
Et donc la solution du système est le couple $(1\ ;\ 0)$

Remarque : Cette interprétation graphique de la solution du système, qui est souvent approximative, permet cependant de contrôler les résultats obtenus par le calcul

4) Systèmes très particuliers :

a. Systèmes admettant une infinité de couples solutions :

Exemple : Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$$

Utilisons la méthode par substitution, on a alors :

$$\begin{cases} x = 7 - y \\ 2(7 - y) + 2y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - y \\ 14 = 14 \end{cases}$$

La deuxième équation du système est indépendante des inconnues et est toujours vérifiée. Le système admet donc une infinité de couples solutions. Il suffit de choisir une valeur de x et de calculer la valeur de y correspondante…

b. Systèmes n'admettant pas de solution :

Exemple : Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Utilisons la méthode par substitution, on a alors :

$$\begin{cases} x = 7 - y \\ 2(7 - y) + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - y \\ 14 = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation du système est indépendante des inconnues et n'est jamais vérifiée. Le système est sans solution. *(ie : il n'existe pas de couple de valeurs vérifiant en même temps les deux équations du système)*